



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 07.02.2026

CLASA a X - a

Problema 1 (22,5 puncte)

Fie expresia $E(x) = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \cdot \sqrt[3]{\sin \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{4}}, x \in \mathbf{R}$.

a) Arătați că $E(x) \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

b) Determinați valoarea reală a lui x pentru care $E(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 1$.

Problema 2 (22,5 puncte)

Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, astfel încât $f(f(x)) = x^{2025}f(x)$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

a) Calculați $f(0)$.

b) Demonstrați că dacă $f(x) \neq 0$, pentru orice $x \in \mathbf{R}^*$ atunci f este injectivă.

SGM Nr. 2/2025

Problema 3 (22,5 puncte)

Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(\log_2 x - 5) = \frac{x}{32}$.

a) Determinați valoarea lui x pentru care $\log_2 x - 5 = \log_2 8 + \log_{\sqrt[4]{2}} \sqrt{2} - \log_{\sqrt[3]{2}} 2$.

b) Calculați $S = f(1) + f(2) + \dots + f(2026)$.

Problema 4 (22,5 puncte)

În planul complex se consideră punctele $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ cu $z_A, z_B, z_C \in \mathbf{C}^*$, astfel încât $z_A + z_B + z_C = 0$ și $|z_A| = |z_B| = |z_C|$.

a) Arătați că $z_A^2 + z_B^2 + z_C^2 = 0$.

b) Calculați $(z_A - z_H)^2 + (z_B - z_G)^2 + (z_C - z_O)^2$, unde z_H, z_G și z_O sunt afixe ortocentrului, centrului de greutate, respectiv al centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Se acordă 10 puncte din oficiu.